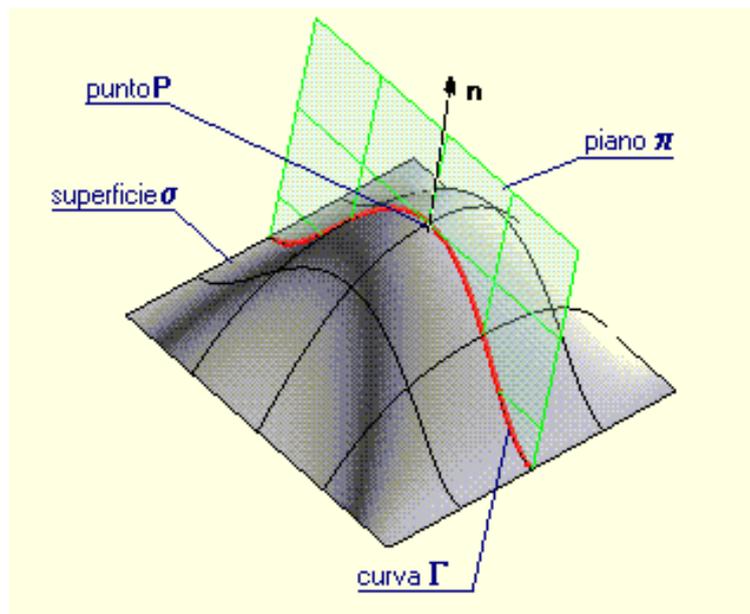
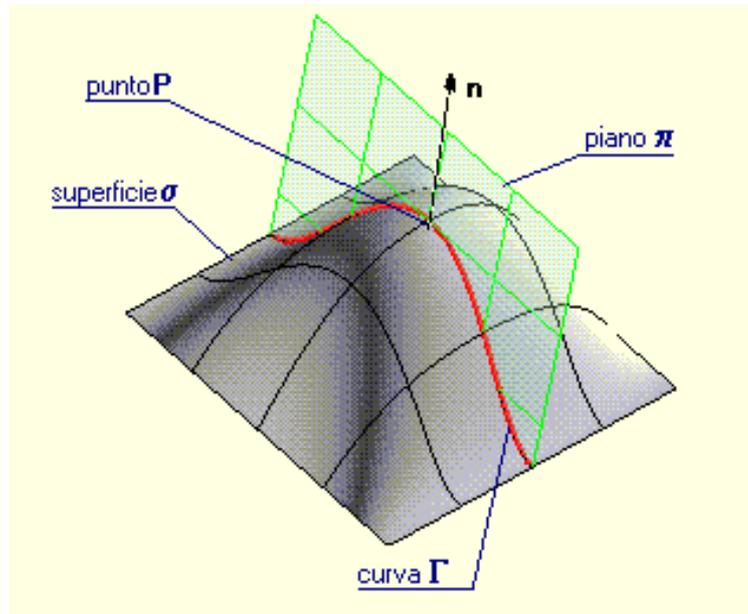


Definizione di curvatura di una superficie

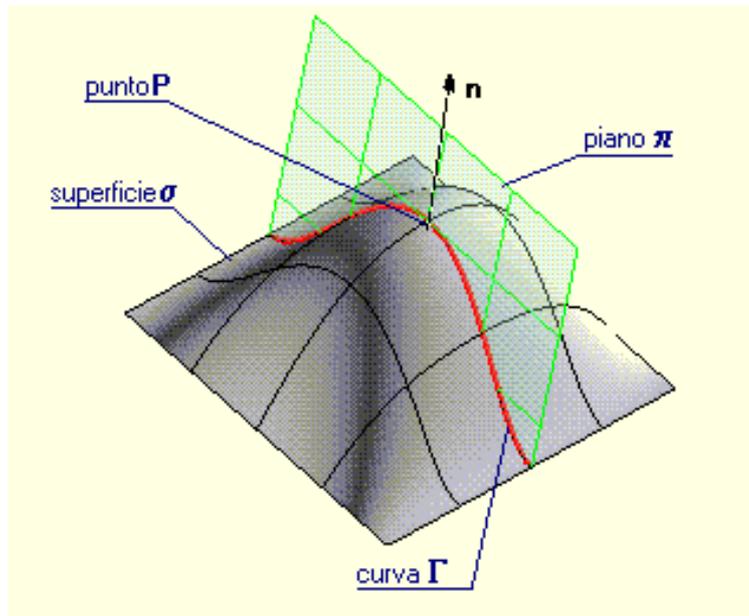
In ogni punto \mathbf{P} di una superficie σ , la curva Γ di intersezione tra σ ed un qualsiasi piano π che contiene la normale \mathbf{n} alla superficie in \mathbf{P} ha una determinata curvatura ρ ed un raggio di curvatura definito dall'equazione:

$$R = \frac{1}{\rho}$$





Naturalmente, per P passa un intero fascio di piani contenenti la normale n . Eulero ha però dimostrato che *esistono e sono uniche una direzione per la quale la curvatura è massima ed una direzione per la quale la curvatura è minima*. Le curvatures in tali direzioni sono dette *curvature principali*.



Se si indica con Θ l'angolo formato da un piano π passante per la normale n ed il piano π_2 corrispondente alla curvatura principale massima, detti rispettivamente R_2 il raggio di curvatura massima ed R_1 il raggio di curvatura minima, per il raggio di curvatura R nella direzione individuata dal piano π vale la seguente *formula di Eulero*:

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin^2 \theta}{R_1} + \frac{\cos^2 \theta}{R_2}$$

Due combinazioni delle curvatures principali sono di particolare interesse: si tratta della semisomma delle due curvatures principali e del loro prodotto:

- la **curvatura media**:

$$H = \frac{1}{R_M} = \frac{2}{R_1 + R_2}$$

- la **curvatura Gaussiana** (o curvatura *totale*):

$$K = \frac{1}{R_G} = \frac{1}{R_1 \times R_2}$$

La curvatura gaussiana K relativamente ad un punto P è tale che:

- Quando $K < 0$
la curvatura massima e quella minima hanno segno opposto; la superficie, nelle vicinanze di P , attraversa il piano tangente assumendo *la forma di una sella* (esempio: iperboloide ad una falda)
- Quando $K = 0$
una delle due curvatures è nulla, per cui la curvatura ha sempre il medesimo segno dell'altra curvatura principale; ne segue che, nelle vicinanze di P , la superficie giace sempre dalla stessa parte del piano tangente (esempio: cono, cilindro)
- Quando $K > 0$
la curvatura massima e quella minima hanno quindi lo stesso segno: nelle vicinanze di P la superficie giace ancora tutta dalla stessa parte del piano tangente (esempio: ellissoide)